**Maatriksite liitmine on kommutatiivne tõestus:**

Olgu  ning olgu 

Tähistame maatriksid X ja Y nende üldelementide kaudu.

X=(xij) Y=(yij)

Vastavalt maatriksite liitmise definitsioonile

Tähistame X+Y ja Y+X nende üldelementide kaudu:

X+Y=(zij) Y+X=(wij)

Tõestuseks peame näitama,

korral!

Vastavalt maatriksite liitmise definitsioonile kehtivad seosed

Zij=xij+yij wij=yij+xij  , korral.

Et Xij ja Yij on IR, siis reaalarvude liitmise omaduse R1 põhjal kehtib

Xij+Yij=Yij+Xij , korral.

Seetõttu ka

Zij=wij , korral.

M.O.T.T.

**Maatriksite korrutamise assotsiatiivsuse tõestus:**

Olgu ning

Tähistame tõestuses vajalikud maatriksid nende üldelementide kaudu:

X=(xij) y=(yij) Z=(zij)

XY=(tij)

XZ=(uij)

(XY)Z=(vij)

X(YZ)=(wij) samad mõõtmed

Tõestuseks on tarvis näidata,et vij=wij ,

korral

Maatriksite korrutamise definitsiooni põhjal:

tij=kiYik

uij=ilZlj

vij=ilZlj =

wij=ikukj =

kasutame omadust R5:

Tähistame akl=(XikYkl)Zlj siis,

Eelnevalt tuletatud valemi põhjal

Vij=wij=>(XY)Z=X(YZ) M.O.T.T.

**Kui maatriksi mingile reale liita mõni teine rida, siis determinant on võrdne tõestus:**

Olgu

I liidame maatriksi A kndale reale arvuga läbi korrutatud l-nda rea.

Olgu sel teel saadud maatriksi A’

????????????????????????????????????????????????????????

II liidame maatriks A kndale veerule arvuga läbi korrutatud l-nda rea.

Olgu saadud maatrik A’’

A. Põhjal A= ning

(A’’)T on saadud maatriksi AT selle k-nda reale λ kordse l-nda rea liitmisel.

Osa I põhjal .

M.O.T.T.

**Maatriksite korrutise determinandi mingi värk tõestus:**

Olgu antud

Arvutame D kahel viisil, saades kord vastuseks |XY| ning kord |X|\*|Y|

1)

\*

2)

C11=0+X11Y11+X12Y21+..+X1nYn1 => Cij=0+Xi1Y1j+..+XinYnj

Näeme, et C=XY => D=|C|=|XY|

Seega |XY|=|X||Y|

M.O.T.T.

**Kui n-järku maatriksil A leidub pöördväärtus, siis on nad regulaarsed tõestus:**

Olgu , et A-l leidub pöördmaatriks, siis eksisteerib selline maatriks B, et A\*B=E ja B\*A=E

Vastavalt maatriksite korrutise determinandist. |A|\*|B|=|A\*B|=|E|=1

Oletame, et A ei ole regulaarne, siis |A|=0 =>|A|\*|B|=0=1 vastuolu => A on regulaarne.

Oletame, et B ei ole regulaarne, siis |B|=0=>|A|\*|B|=0=1 vastuolu => B on regulaarne.

M.O.T.T.

**Kui ruutmaatriksil on pöördmaatriks, siis ainult üks tõestus:**

Olgu ning maatriks, millel leidub pöördmaatriks.

Oletame, et maatriksil A on rohkem kui 1 pöördmaatriks. Olgu B ja C mingid maatriksi A pöördmaatriksid.

Pöördmaatriksi def. põhjal peavad kehtima

(1) A\*B=E (2) B\*A=E (3) A\*C=E (4) C\*A=E

B(AC)B\*E=B

Mat korrutamine on assotsiatiivne! => (B\*A)CE\*C=C

=> B=C

Järelikult on Mat A kõik pöördmaatriksid võrdsed, järelikult mat A-l on ainult üks pöördmaatriks.

M.O.T.T.

**Vektorruumis on ainult üks nullelement tõestus:**

Olgu meil vektorruum V. Oletame, et selles vektorruumis on vähemalt 2 nullelementi. Tähistame 01 , 02.

Omaduse 2 põhjal kehtivad seaosed (1)x+01=x (2) 01+x=x (3)x+02=x (4) 02+x=x korral.

Et x võib olla suvaline vektorruumi element, võime temaks võtta ka 01 või 02.

Asendades seoses (2) elemendi x elemendiga 02 ning seoses (3) elemendiga 01, saame

(2’) 01+02=02 (3’) 01+02=01

(2’) ja (3’) vasakud pooled on võrdsed, siis peavad võrdsed olema ka paremad pooled => 01=02

Seega on vektorruumis V vaid üks nullelement.

M.O.T.T.

**Lineaarkate L(a1,a2,..,am), kus on vektorruumi V alamruum tõestus:**

Olgu V vektrorruum, . Olgu L(a1..am)={x=ξ1a1+..+ ξmam| ξ1.. ξ2 IR}

Et V on vektorruum, siis II põhjal ξ1a1, ξ2a2,.., ξmamV

I põhjal ξ1a1+ ξ2a2V

ξ1a1+ ξ2a2+ ξ3a3V ...jne

Seega L(a1,...,am)⊂V

Paneme tähele a1=1\*a1+0\*a2+...+0\*am ∈L(a1..am) seega pole tühihulk.

Olgu λ ja μ ∈ IR x,y ∈ L(a1..am)

Kas λx+ μy ∈ L(a1..am)

∃ ξ1.. ξm ∈ IR

X= ξ1a1+..+ ξmam y= ξ1a1+..+ ξmam

λx+ μy= λ (ξ1a1+..+ ξmam)+ μ ( ξ1a1+..+ ξmam) =(7. Ja 6. Omaduse järgi)= (λ ξ1)a1+...+(λ ξm)am+ +(μξ1)a1+...+(μ ξm)am=(4. Omaduse järgi)= (λ ξ1)a1+...+( μξ1)a1+...+( λ ξm)am+( μ ξm)am=(8. Omaduse järgi)=( λ ξ1+μξ1)a1+...+(λ ξm+μ ξm)am ∈ L(a1..am)

Seega on tegemist vektorruumi ja alamhulgaga

M.O.T.T.

**Üldelemendiline vektorsüsteem {a} on lineaarselt sõltuv, kui a on nullelement(a=0) tõestus:**

Tarvilikkus(=>) Olgu V vektorruum ning a olgu vektorruumi element.

Olgu see ühe elemendiline süsteem lineaarselt sõltuv.

St ξa=0 on vähemalt kaks lahendit. ξ 1, ξ2 ∈ IR ξ 1≠ ξ2

Vähemalt üks arvudest ξ 1 ξ2 on nullist erinev. Olgu selleks ξ 1≠0

Sellisel juhul leidub arv ∈IR

1a=0 |\*

\*( ξ 1a)= ξ 1\*0=(7. Ja 8. Omadus)=0 (\* ξ 1)a=0 => 1a=0 => a=0

Piisavus: Olgu v vektorruum, vaatleme vektorsüsteemi {0} ja talle vastavat vektorvõrrandit ξ\*0=0

Paneme tähele, et ξ=1 on selle võrrandi lahend, mis ei ole nullelement.

Vastavalt definitsioonile on meil tegemist lineaarselt sõltuva süsteemiga.

M.O.T.T.

**Elemendi kordinaadid igal baasil määratakse üheselt tõestus:**

Olgu V n-mõõtmeline vektorruum baasiga {e1...en} ning olgu x∈V. Oletame, et elemendi x kordinaate on võimalik valida vähemalt kahel viisil.

x=x1e1+...+xnen ∈IR

Vektorruumi aktsioomi 3 põhjal x+(-x)=0 (1)

Järeldus 7.7 (-1)\*x=-x

Seega –x=(-1)[]=(7. Omadus)= = 6. Omadus=

Võrrandist (1) saame 0=x+(-x)=]+[]=8. Omadus= ={ }= ξ 1e1+...+ ξ nen

Et {e1...en} oli V baas, saab võrrandil ξ 1e1+...+ ξ nen=0 olla vaid null-lahend ξ 1=0 ... ξ n=0

Seetõttu korral => vektori kordinaadid antud baasil määratakse ühiselt.

M.O.T.T.

**Homogeense LVS kõigi lahendikomplektide Ln on vektroruumi Rn alamruum tõestus:**

Olgu antud homogeenne LVS

ja olgu Lh selle LVS-i kõigi lahendikomplektide hulk.

Selleks, et Lh oleks ℝn alamruum peab

1) Lh∈ ℝn

2) Lh≠ø

3)

1)Eelneva põhjal Lh ∈ ℝn

2)(0,0,...,0) ∈ Lh => Lh≠ø

3)Olgu x=(α1, α2,..., αn) y=(β1, β2,..., βn) ja

Et x,y∈ Lh, siis ai1α1+ ai2α2+...+ ainαn=0

ai1 β 1+ ai2 β 2+...+ ain β n=0

korral

λx+μy=λ(α1,..., αn)+ μ(β1,..., βn)=ℝn korral, def.=( λ1α1,..., λnαn)+( μ1β1,..., μnβn)= ℝn liitmine=( λ1α1+ μ1β1,..., λnαn+ μnβn)

Olgu , siis

ai1(λα1+ μβ1)+...+ ain(λαn+ μβn)=R5= ai1(λα1)+ ai1(μβ1)+...+ ain(λαn)+ ain (μβn)=R1,R2= λ(ai1α1)+ μ(ai1β1)+...+ λ(ainαn)+ μ(ainβn)=R5= λ()+μ()=0

Seega λx+μy ∈Lh ning Lh on ℝn alamruum.

M.O.T.T.

**Vektorite liitmise kommutatiivsuse tõestus:**

Olgu meil 2 vabavektorit

Olgu A∈E, siis leidub selline punkt B, et

A C

B

Samuti leidub vabavektori def. kohaselt punkt C, et

Vastavalt vektorite liitmise def.

-(Mingi kahtlane kriips konspektis)

Vabavektori def. kohaselt leidub selline punkt D,F∈E, et

D

A F

C

B

Peaksime näitama, et F=C

Vaatleme murdjoont FDABC

Vastavalt punktide B,C,D ja F valikule teame, et

|DF|=||=||=|| =>|DF|=|AB|

|AB|=||=||=||

|AD|=||=||=|| =>|DF|=|AB|

|BC|=||=||=||

Samuti , ∈ = ||

, ∈ = || tekkis kaks paari sama pikki paralleelseid lõike =>rööpkülik

FDABC => F=C

Et F=, siis .

M.O.T.T.

**Vektorite summa proj. vektor on võrdne nende vektorite proj. vektorite summaga tõestus:**

Olgu antud vektorid ning sirgel l, mis lõikab vektori poolt määratud sirget täpselt ühes punktis.

Hakkame leidma vektorite , ja proj. vektoreid vektori sihile paralleelselt sirgega l. Olgu A∈**E**2, siis ∃ punktid B,C ∈ **E**2 , et ja

Teoreem 24.1 tõestus:

Olgu meil antud ellips ξ. Vaatleme tema võrrandit ellipsi kanoonilises reperis. ..